Cours 2

Déf (suite de composition) pour un groupe **FINI**.

$$\{1\} = G_n \underset{\neq}{\triangleleft} G_{n-1} \underset{\neq}{\triangleleft} \cdots \underset{\neq}{\triangleleft} G_1 \underset{\neq}{\triangleleft} G_0 = G$$

tq G_{i-1}/G_i est un groupe **simple** (non-trivial)

Rq : Pour un groupe infini, on n'a pas forcément une suite de composition

(e.g. : $\{0\} \triangleleft \cdots 8\mathbb{Z} \triangleleft 4\mathbb{Z} \triangleleft 2\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$)

Thm (Jordan–Hölder)

- (Existence) Tout gp fini admet une suite de composition
- (Unicité) Deux suites de composition ont même longeur et même facteurs avec multiplicités.

Preuve.

Existence : facile ! par récurrence sur $|G|$.

Soit G un groupe fini.

On considère un sous-groupe distingué **max**. G_1 de G.

où un sous-gp distingué $G' \triangleleft G$ est dit <u>maximal</u>

si pour tout sous-gp distingué G'' tq $G' \triangleleft G'' \triangleleft G$

alors $G'' = G'$ ou $G'' = G$

(Rq: $G' \triangleleft G$ max. $\Longleftrightarrow$ G/G' est simple)

ceci existe par l'hypothèse $|G| < \infty$

(<u>Exercice</u>. Indication on utilise que si $G' \underset{\neq}{\triangleleft} G'' \underset{\neq}{\triangleleft} G$ alors $[G : G''] < [G : G']$)

Par l'hypothèse de récurrence car $|G_1| < |G|$

$\Longrightarrow \exists$ une suite de composition de G_1

$$\{0\} = G_n \underset{\neq}{\triangleleft} G_{n-1} \underset{\neq}{\triangleleft} \cdots \underset{\neq}{\triangleleft} G_2 \underset{\neq}{\triangleleft} G_1 = G_1$$

$\Longrightarrow$ on a une suite de composition de G :

$$\{0\} = G_n \underset{\neq}{\triangleleft} G_{n-1} \underset{\neq}{\triangleleft} \cdots \underset{\neq}{\triangleleft} G_2 \underset{\neq}{\triangleleft} G_1 = G_1 \underset{\neq}{\triangleleft} G_0 = G$$

(<u>Rq</u> on a utilisé que G/G_1 est $\underset{\text{max. de } G_1}{\underset{\Uparrow}{\text{simple}}}$).

(Unicité) Soient

① $\{0\} = G_n \underset{\neq}{\triangleleft} G_{n-1} \underset{\neq}{\triangleleft} \cdots \underset{\neq}{\triangleleft} G_2 \underset{\neq}{\triangleleft} G_1 \underset{\neq}{\triangleleft} G_0 = G$

② $\{0\} = G'_{n'} \underset{\neq}{\triangleleft} G'_{n'-1} \underset{\neq}{\triangleleft} \cdots \underset{\neq}{\triangleleft} G'_2 \underset{\neq}{\triangleleft} G'_1 \underset{\neq}{\triangleleft} G'_0 = G$

deux suites de composition de G

si $G_1 = G_1'$, alors l'hypothèse de réc. $\Rightarrow$ conclusion

si $G_1 \neq G_1'$, On considère :

$$G_1 \cap G_1' \underset{\neq}{\triangleleft} G_1 \underset{\neq}{\triangleleft} G$$

$$G_1 \cap G_1' \underset{\neq}{\triangleleft} G_1' \underset{\neq}{\triangleleft} G$$

- $G_1 \cdot G_1' :=$ le gp distigné engendré par G_1 et G_1'

$\Rightarrow$ $G = G_1 \cdot G_1'$ par la max. de G_1 (ou G_1')

Comme $\quad G_1 / G_1 \cap G_1' \simeq G_1 \cdot G_1' / G_1'$ $\quad$ (2^{nd} thm fond. de groups)

$$= G / G_1'$$

de même $\quad G_1' / G_1 \cap G_1' \simeq G_1 \cdot G_1' / G_1 = G / G_1$

On applique l'hypothèse de réc pour $G_1 \cap G_1'$

$\Rightarrow$ On a une suite de composition.

③ $\quad \{0\} = G''_{n''} \underset{\neq}{\triangleleft} \; - - - \underset{\neq}{\triangleleft} G''_2 \underset{\neq}{\triangleleft} G_1 \cap G_1'$

$\exists$ une suite de composition de G_1

④ $\{0\} = G''_{n''} \underset{\neq}{\triangleleft} - - - \underset{\neq}{\triangleleft} G''_2 \underset{\neq}{\triangleleft} G_1 \cap G_1' \underset{\neq}{\triangleleft} G_1$.

l'hyp. de réc. pour G_1 (minicité) et ① et ④

$\Rightarrow$ $n'' = n$ et les facteurs de ①

$= $ les facteurs de ④ $\cup \{G/G_1\}$

De même ③ donne
une suite de composition de G_1'

⑤ $\{0\} = G''_{n''} \ntrianglelefteq \cdots\cdots - G''_2 \ntrianglelefteq G_1 \cap G_1' \ntrianglelefteq G_1'$

Réc. pour G_1' et ② et ⑤

$\Rightarrow n'' = n'$ et les facteurs de ②

$= $ les facteurs de ⑤ $\cup \{G/G_1\}$

$\Longrightarrow n = n'$ et les facteurs de ①

$= $ les facteurs de ②

$\square$

Exemple $\quad G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$$\{0\} = G_2 \triangleleft G_1 = 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = G_0$$

$$\{0\} = G_2' \triangleleft G_1' = 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = G_0$$

$$G_1 \cap G_1' = \{0\}$$

$$\overset{\{0\}}{\overset{\shortparallel}{G_1 \cap G_1'}} \triangleleft \overset{2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}{\overset{\shortparallel}{G_1}} \triangleleft G_0$$

$$\begin{array}{ccccc} \{e\} & & & & \\ \| & & & & \\ G_1 \cap G_1' & \triangleleft & G_1' & \triangleleft & G_0 \\ & & \| & & \\ & & 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & & \end{array}$$

$\square$